Werner Loh

Grundlagenkritik der Klassischen Aussagenlogik

Formeln der Klassischen Aussagenlogik heben die Aussagen bzw. deren Variablen hervor (z.B. „p ∨ ¬q“), während das, was die Klassische Aussagenlogik charakterisiert, Wahrheitsfunktion und Extensionalität, nur reduziert in den Symbolen für die Funktoren zum Ausdruck kommt. Die Arbeit stellt eine Weise der Formalisierung vor, die Wahrheitsfunktion und Extensionalität an Hand dieser Formalisierung systematisch und exakt erörtern lässt, insbesondere Argument- und Funktionswerte. Ein wesentliches Ergebnis ist, dass die Klassische Aussagenlogik widersprüchlich ist, trotz verschiedener Beweise bzw. Nachweise für ihre Widerspruchsfreiheit, die auf fehlenden Klärungen der die Klassische Aussagenlogik charakterisierenden Grundlagen beruhen.

Formulas of classical propositional logic emphasize the propositions or their variables (e.g. "p ∨ ¬q"), while what characterizes classical propositional logic, truth function and extensionality, is only expressed in a reduced form in the symbols for the functors. The paper presents a way of formalization that allows truth function and extensionality to be discussed systematically and precisely on the basis of this formalization, in particular argument and function values. An essential result is that classical propositional logic is contradictory, despite various proofs or proofs for its freedom from contradiction, which are based on missing clarifications of the foundations characterizing classical propositional logic.

Keywords: contradiction, extensionality, formalization, missing clarifications, truthfunction

1. Voraussetzungen

Eine Grundlagenkritik der Klassischen Aussagenlogik braucht Merkmale, was die Klassische Aussagenlogik ausmacht. Trotz der unterschiedlichen Auffassungen und Darstellungen der Klassischen Aussagenlogik lassen sich charakterisierende Angaben finden. Stichworte hierfür sind „Extensionalität“ und „Wahrheitsfunktionalität“: „*Extensionalität*“ bedeutet, dass die Zuordnungen der Wahrheitswerte der Wahrheitsfunktionen untereinander nicht von den Aussagen (bzw. Propositionen, Sätze usw.) abhängen.[1] Aussagen sind gleichsam bloß Vehikel

[1] Bauer et al. (1991), 4; Ebbinghaus et al. (1996), 34

für Wahrheitswerte.[2] Von einfachen, elementaren Aussagen bzw. Aussageformen wie „p ∨ q" ausgehend bedeutet „*Wahrheitsfunktionalität*", dass die Funktionswerte allein von den Argumentwerten innerhalb jeweiliger kombinatorischer Rahmen bestimmt bzw. ausgewählt werden. Es besteht kein innerer Zusammenhang unter den Argument- und Funktionswerten der Wahrheitsfunktion für sich.

Obwohl Extensionalität und Wahrheitsfunktionalität die Klassische Aussagenlogik charakterisieren, kommen sie nicht gemäß ihrer Relevanz in deren Formeln zum Ausdruck. Man nehme als Beispiel die Formel „p ∨ ¬q" und liest sie unbekümmert, dann erhält man den Eindruck, die Disjunktion (Adjunktion) verknüpfe „p" mit „¬q" und die Negation betreffe direkt „q". Nun binden Funktoren wie Disjunktion und Negation nicht Aussagen bzw. deren Variablen, sondern Wahrheitswerte durch Zuordnungen in kombinatorischen Rahmen. Solche Lesart leistet *Themenverfehlungen* Vorschub. Formeln, die auf solche Weise Themenverfehlungen Vorschub leisten mögen, sollen „*Simplikationsformeln*" genannt werden, und Formeln, die das vermeiden sollen, „*Transparenzformeln*".

2. Formalisierung von Transparenz

Der kombinatorische Rahmen von Wahrheitsfunktionen wird in den Zeilen der *Wahrheitstabellen* veranschaulicht. Die Kopfzeilen unterstreichen die Trennung der Aussagen bzw. deren Variablen von Wahrheitswerten (Extensionalität). Wenn aber Wahrheitsfunktionen Wesentliches der Klassischen Aussagenlogik ausmachen und nicht die Aussagen bzw. ihre Variablen, dann müssten die Wahrheitsfunktionen Hauptträger der Formalisierungen sein, in welchem Ausmaß auch immer. Forschungen, die diese Problemlage verfolgt haben, gibt es vermutlich nicht. Dennoch lassen sich Konzepte finden, die hilfreich für diese Problemlage sind.

Kurt Schütte hat die reine Wahrheitsfunktion für die Disjunktion (Adjunktion) durch folgende Definitionsgleichungen ausgedrückt „$\vee(\mathrm{w},\mathrm{w}) = \vee(w,f) = \vee(f,w) = w$, $\vee(f,f) = f$ " und danach mit Variablen (v_1, v_2) allein nur für diese Wahrheitswerte versehen.[3] Um Verwechselungen mit „∨" zu vermeiden, sollen statt „v_1, v_2" hier „α" und „β" verwendet werden. Hierdurch sind dyadische Wahrheitstafeln aufstellbar, die rechtsspaltig die Funktionswerte angeben und in den beiden linken Spalten getrennt von Aussagen mit ihren Variablen die Argumentwerte. Die Funktionen lassen sich nach den von oben nach unten aufgeführten Wahrheitswerten unterscheiden, da die Kombinatoriken der Argumentwerte für alle Funktionen gleichartig zu machen sind. Es genügt also für die *Disjunktion (Adjunktion) die Aufzählung:* WWWF. Für die aussagenlogische Konjunktion „∧" werden folgende Funktionswerte angegeben: WFFF.

Hat man Wahrheitsfunktionen unabhängig und in diesem Sinne losgelöst von Aussagen bzw. deren Variablen bestimmt, dann würden *Wahrheitsfunktionen weder Widersprüche noch*

---

[2] Russell 1926, 660

[3] Schütte 1960, 6

Widerspruchsfreiheiten angeben lassen, denn es fehlen Aussagen. Erst Aussagen ermöglichen widerspruchsfreie bzw. widersprüchliche Verhältnisse.

Da Aussagen als Vehikel für die Wahrheitsfunktionen selbst unerheblich sind, reicht es aus, sie oder ihre Variablen („p" und „q") bloß als *Indizes* zu den Wahrheitswerten bzw. deren Variablen zu berücksichtigen. Hiermit werden die oben angedeuteten Themenverfehlungen behindert, was Transparenz erhöht. Für die alleinige Variablengestalt der Disjunktion (Adjunktion) ergibt sich folgendes Bild, wobei die Variable für den Funktionswert durch „φ" ausgedrückt werden soll: $\alpha_p \vee \beta_q = \varphi$.

Die *Negation* der Klassischen Aussagenlogik wird als Wahrheitsfunktion aufgefasst und gehört dem Bereich der Extensionalität an. Sie betrifft also nicht Aussagen bzw. deren Variablen, obgleich sie schreibtechnisch und wahrheitsfunktional simplifizierend vor diese gesetzt wird. Schütte gab ihr folgende Definitionsgleichung für Wahrheitswerte als Konstanten: $\neg(w) = f$, $\neg(f) = w$.[4] Die Negation ist ein Funktor für Komplementverhältnisse unter Wahrheitswerten: Fasst man die Menge des Wahren und die Menge des Falschen unter der Obermenge der Wahrheitswerte zusammen, dann sind die jeweiligen Mengen des Wahren und des Falschen komplementär. Der Negator ordnet komplementäre Mengen einander zu. Die Aussage „Es ist wahr, dass es in Paris am Eiffelturm jetzt schneit" (abgekürzt durch „A"), hat wahrheitsfunktional simplifizierend negiert („¬A") zur Folge: „Es ist falsch, dass es in Paris am Eiffelturm jetzt schneit". Eine umgangssprachliche und nicht aussagenlogische Negation könnte z.B. zu einem Nicht-Wissen neigen. Die Variablengestalt der aussagenlogischen Negation ergibt wahrheitsfunktional bezogen formalisiert: $\neg(\alpha_p) = \varphi$.

Grundlagenerforschung zur Klassischen Aussagenlogik hätte entsprechend deren charakteristischen Merkmalen Wahrheitsfunktionen vordringlich zu berücksichtigen und daraufhin wegen der Extensionalität erst die Verhältnisse der Wahrheitswerte zu Aussagen bzw. deren Variablen. Da es um solche (immanenten) Grundlagen im Folgenden gehen soll, die die Formeln und deren Bewertungen mittels Wahrheitswerten betreffen, wozu die Kombinatoriken der Wahrheitstabellen gehören, handelt es sich z.B. nicht um Grundlagenfragen, was z.B. unter „Aussage", „Proposition", „Satz" zu verstehen sei

3. Verhältnisse von Argumentwerten zu Funktionswerten

Eine solche, gleichsam immanente, vom Gebrauch der Formeln ausgehende Problemlage betrifft das Verhältnis von Argumentwerten zu Funktionswerten, für die gleiche Termini mit ihren verwandten Ausdrücken verwendet werden wie „Wahrheit" und „Falschheit". Wenn es wahr ist, dass $2 + 3 = 5$ ist, und es wahr ist, dass Paris jetzt an der Seine liegt [„$(2 + 3 = 5) \wedge$ (Paris liegt jetzt an der Seine)"], was mag dann *„wahr" als Funktionswert sinnvoll bedeuten*, nämlich dass der konjunktive Satz wahr ist, wo doch keine den Teilsätzen entsprechender, zusätzlicher Satz inhaltlich vorhanden ist? „wahr" ist für die Teilsätze vergeben. Man mag

[4] Schütte 1960, 6

hier an eine reflexive Instanz denken, die die *Geltung* der ausgewählten Zusammenstellung betont. Aber das würde von der Klassischen Aussagenlogik fortführen. Wozu braucht man in der Klassischen Aussagenlogik diese Egalisierung des Sprachgebrauchs, so dass sowohl für die Argumentwerte als auch für den Funktionswert die Ausdrücke „wahr“ bzw. „falsch“ verwendet werden?

Formeln, die aus Formeln zusammengesetzt und *äquivalent* sind, können in anderen Kontexten einander ersetzen. Die Äquivalenz „↔“ hat die Funktionswerte: WFFW. Wenn die Argumentwerte sich gleichen, ist der Funktionswert „W“ zuordenbar, sonst „F“. So soll z.B. „¬p ∨ q“ durch „p → q“ ersetzbar sein und umgekehrt, weil sich deren *Funktionswerte gleichen*. „¬p v q“ hat die Funktionswerte: WFWW und die Subjunktion (Implikation) „p → q“ hat die gleichen Funktionswerte: WFWW. Die Argumentwerte beider Formeln betreffen jedoch radikal Verschiedenes. Denn in der ersten Zeile der Wahrheitstabelle zu „¬p v q“ ist „p“ „falsch“ und in der Wahrheitstabelle zu „p → q“ ist „p“ „wahr“ zuzuordnen, was die entsprechende Transparenzformel deutlich macht: $\neg w_p \vee w_q = w = w_p \rightarrow w_q$. Demnach kann die Äquivalenz hier nur allein auf den Funktionswerten der beiden Formeln beruhen und nicht noch die Argumentwerte zur Basis haben, weil sie sonst Widersprüchliches zu Grundlage hätte. *Diese Funktionswerte sind zugleich auch Argumentwerte* für die Äquivalenz. Da nun schon für die Teilformeln die Bedeutungen von „wahr“ und „falsch“ als Funktionswerte nicht innerhalb des aussagenlogischen Apparats einzugliedern sind analog den Argumentwerten, die auf Aussagen zu beziehen sind, wie immer dies philosophisch auszudeuten wäre, bleibt die Frage bestehen: wie sind Funktionswerte im aussagenlogischen Apparat aussagenlogisch begründet unterzubringen?

Wenn die aussagenlogische Äquivalenz Funktionswerte der Teilformeln umfunktionierend nun als Argumentwerte für ihre Wahrheitsfunktion verwendet, dann beziehen sich diese umfunktionierten Argumentwerte nicht mehr auf Aussagen. Allerdings ist der *Ausdruck „Wahrheitsfunktion“ hier irreführend*, denn der Bezug zu Aussagen fehlt. Wahrheit und Falschheit spielen keine Rolle mehr. Vielmehr geht es nur noch darum, *äußerst abstrakt, inhaltslos duale Entitäten, die komplementär sind,* anzunehmen. Es liegt eine *Distanzierung von Wahrheitswerten* vor, auch wenn die Teilformeln selbst noch auf den Symbolen für Wahrheitswerte beruhen. Die Klassische Aussagenlogik verlässt hier mit Zuwachs der Komplexität den Bezug zu Wahrheitswerten, da der direkte Bezug zu Aussagen verlassen wird, ohne dass dies selbst symbolisch zum Ausdruck kommt.

Der aussagenlogische Negator ist ein Funktor, der die Komplementarität solcher äußerst abstrakter inhaltsloser dualer Entitäten zuordnen lässt. Die Negation belässt die Funktion innerhalb des aussagenlogischen Rahmens bzw. Apparats. Ihre Anwendung auf andere Funktionen führt nicht aus dem Rahmen der Klassischen Aussagenlogik raus, sondern rundet sie gleichsam ab. Eine Negation einer Konjunktion (WFFF) ohne feste Einbindung in die Klassische Aussagenlogik könnte zu verschiedenen aussagenlogischen Junktoren führen, etwa zur Disjunktion (WWWF) oder zur Subjunktion (WFWW) und öffnet keine Türe zu einer unbegrenzten Fragwürdigkeit (????), zwingt aber aussagenlogisch wohl bestimmt zur Schefferschen Funktion (|: FWWW), wobei deren aussagenlogische Negation zur Konjunktion *abrundend zurückkehren* lässt. Solche Abrundung (Bernays 1976, 11) ist als

Äquivalenz formulierbar: $(\alpha_p \mid \beta_q) \leftrightarrow \neg(\alpha_p \wedge \beta_q)$. Sie ist zugleich ein aussagenlogisches Gesetz.

Wenn die Wahrheitswerte der Argumente von Wahrheitsfunktionen durchweg zu Funktionswerten des Wahren führen, dann liegt ein *aussagenlogisches Gesetz* vor. Man braucht also nicht Aussagen für die Überprüfung, ob ein aussagenlogisches Gesetz vorliegt, hinzuziehen, sondern berücksichtigt allein die Wahrheitswerte der Argumente. Hält diese Auffassung einer Überprüfung stand? Hierfür verwende ich die Formel „$p \vee \neg p$“, deren transparente Formalisierung folgende Gestalt bekommt: $\alpha_p \vee \neg\alpha_p$. Die Aussagenvariable „p“ soll durch die Aussagenkonstante „Paris liegt jetzt an der Seine“, abgekürzt durch „B“, ersetzt werden: $\alpha_B \vee \neg\alpha_B$. Nun sind noch in die Variablen für Wahrheitswerte die Symbole für den Wahrheitswert das Wahre („*w*“) einzusetzen: $w_B \vee \neg w_B$. Da nun „$\neg(w) = f$“ gilt, ist „$\neg w_B$“ durch „f_B“ zu ersetzen. Man erhält nun die Formel: $w_B \vee f_B$. Aussagenlogisch ist man gezwungen entsprechend der Wahrheitsfunktion für die Adjunktion den Funktionswert „w“ zuzuordnen, was auch für „$w_B \vee f_B$“ zutrifft. Also ist „$p \vee \neg p$“ ein aussagenlogisches Gesetz und damit gilt es als aussagenlogisch widerspruchsfrei, doch aber nur so lange, wie man die zugehörigen Aussagen missachtet und nicht berücksichtigt. Denn nur Aussagen können sich einander widersprechen, nicht aber bloße Wahrheitswerte in Wahrheitsfunktionen ohne eingebundene Aussagen. Sind aber Aussagen Träger von Widerspruchsverhältnissen, dann sind Widerspruchsfreiheitsbeweise ohne Berücksichtigung von Aussagen hinfällig.

Untersucht man Beweise bzw. Nachweise für Widerspruchsfreiheit der Klassischen Aussagenlogik, dann kehren in verschiedener Formulierung durchweg *Distanzierungen von Wahrheitswerten* und der Übergang zu Symbolen (z.B. „0, 1“, Post 1921, 166/167) oder zu bloßen Kalkülfiguren („K_1“, „K_2“, Nagel et al., Anhang) auch hier wieder. *Hierdurch wird sowohl von Aussagen als auch von Wahrheitswerten abstrahiert* (vgl. Rautenberg 1979, 7). Es liegen somit keine Beweise bzw. Nachweise für die Widerspruchsfreiheit der klassischen Aussagenlogik vor, sondern bloße Analogien.[5] Vielmehr verdecken sie Widersprüchlichkeit, was schon die Transparenzformel „$w_B \vee \neg w_B$“ deutlich macht.

Derartige Abstraktionen von Wahrheitswerten und Aussagen mit ihren verschiedenen Verständnissen hinsichtlich ihrer Referenzen auf Gegenstände bzw. Objekten ermöglichen zu referenzlosen Gegenständen wie einfache Schaltungen überzugehen, so dass die Klassischen Aussagenlogik mit Schaltalgebra gleichsetzbar wird (Schmidt 1960, 83), was zur Verdinglichung logischer Verhältnisse führt, wenn etwa davon die Sprache ist, dass das „Oder durch eine Parallelschaltung“ realisiert sei (Schurz 2020, 42), was das Anspruchsniveau an forschender Klärung logischer Verhältnisse erheblich senkt.

Literatur

Bauer, Friedrich L. & Wirsing, Martin 1991. *Elementare Aussagenlogik,* Berlin-Heidelberg-New York usw. : Springer-Verlag.

[5] Ausführlich hierzu: Loh 2009, 79-93.

Bernays, Paul 1977. *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Ebbinghaus, Heinz-Dieter, Flum, Jörg & Thomas, Wolfgang [4]1996. *Einführung in die mathematische Logik*, Heidelberg-Berlin-Oxford: Spektrum Akademischer Verlag.

Loh, Werner 2009. ‶Logiken der Geschichten als Geschichtlichkeiten der Logiken: Disjunktionen über Disjunktionen.″ In: *Interkulturelle Logik*, herausgegeben von Werner Loh, Ram Adhar Mall & Rainer E. Zimmermann, Paderborn: mentis Verlag, 13–121.

Nagel, Ernest & Newman, James R. 1964. *Der Gödelsche Beweis*, Wien-München: R. Oldenburg Verlag.

Post, Emil L1921. ‶ Introduction to a general theory of elementary propositions ‶ *American Journal of Mathematics* 43.3, 163-185.

Rautenberg, Wolfgang 1979. Klassische und nichtklassische Aussagenlogik. Braunschweig-Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn.

Russell, Bertrand 1927.‶Appendix C.‶In: *Principia Mathematica*, Vol. I, second edition, edited by Alfred North Whitehead & Bertrand Russell, Cambridge: Cambridge University Press, 659-666.

Schmidt, H. Arnold 1960. *Mathematische Gesetze der Logik I: Vorlesungen über Aussagenlogik*. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag.

Schütte, Kurt 1960. *Beweistheorie*, Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag.

Schurz, Gerhard 2020, 2. Auflage. Logik. Berlin-Boston: Walter de Gryuter